

الخاصة لناسهتو

تعريف:

ليكن X مجموعة غير خالية وليكن \mathcal{E} مجموعة المجموعات

$$\mu^*: 2^X \rightarrow [0, \infty]$$

$$E \mapsto \mu^*(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ 1 & E \neq \emptyset \end{cases}$$

القول:

البيان μ^* قياس خارجي على

عند انصاف

أو القياس μ^* بيان $\mu^* \sim \mu^*$ أي $(\mu = \mu^* | \mu)$

الحل:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$ بالرفض

(2) ليكن $E, F \in 2^X$ في $E \subset F$

ولنثبت أنه $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$

وهنا غير ثلاث حالات:

(1) $\mu^*(E) = 0 = \mu^*(F) \leftarrow E = \emptyset \leftarrow F = \emptyset$

(2) $\mu^*(E) = 0 < 1 = \mu^*(F) \leftarrow E = \emptyset \text{ و } F \neq \emptyset$

(3) $\mu^*(E) = 1 = \mu^*(F) \leftarrow E \neq \emptyset \text{ و } F \neq \emptyset$

(3) ليكن $E_1, E_2, E_3, \dots \in 2^X$ وليكن $\mu^*(E_n)$ و (نثبت أنه)

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

وهنا غير الحالة الثالثة:

(1) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 \leftarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ و $E_n = \emptyset$ لكل n

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \leq$$

$$(U_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \emptyset \Leftrightarrow E_n \neq \emptyset \text{ مجموعة غير خالية}$$

$$\mu^*(U_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

... μ^* قياس خارجي على 2^X

□ إيجاد صيغة لمجموعة μ^*

نألف صيغة μ^* من كل مجموعة E حيث:

$$E \in 2^X, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subset 2^X$$

وهذا ليس بالبيان الآتي:

$$(A = \emptyset) \Leftrightarrow \mu^*(A) = 0 \text{ ، بالتالي بالبيان الآتي هو}$$

$$0 = 0 + 0$$

$$A \cap E^c = \emptyset, A \cap E = \emptyset \text{ أي أنه}$$

$$2^X \ni E \text{ هو أي مجموعة من أجل كل}$$

$$(U) A \neq \emptyset \Leftrightarrow \mu^*(A) = 1 \text{ بالبيان الآتي هو}$$

$$1 = 1 + 0 \text{ (ب)}$$

$$1 = 0 + 1 \text{ (د)}$$

أي أنه: (ب) تكون $A \cap E^c = \emptyset, A \cap E \neq \emptyset$ $E = X$

(د) تكون $A \cap E^c \neq \emptyset, A \cap E = \emptyset$ $E = \emptyset$

وبذلك يكون

$$\mu^* = \{ \emptyset, X \}$$

3. لقياس $\mu = \mu^*$ لعدد

$$\mu = \mu_{\mu^*} \quad \text{في }]-\infty, +\infty]$$

$$\emptyset \longrightarrow \mu(\emptyset) = 0$$

$$X \longrightarrow \mu(X) = 1$$

تدريب 2-

لتكن X مجموعة غير منتهية و E مجموعة

$$\mu^*: 2^X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

$$E \longrightarrow \mu^*(E)$$

معرفة كالآتي:

$$\mu^*(E) = 0 \quad \text{إذا كانت } E \text{ معدودة على الأكثر}$$

$$\mu^*(E) = 1 \quad \text{إذا كانت } E \text{ غير معدودة}$$

الأمثلة:

$$1. \quad \mu^*(\mathbb{N}) = 0$$

$$2. \quad \mu^*(\mathbb{R}) = 1$$

$$3. \quad \mu^*(\mathbb{R}) = 1 \quad \text{لأن } \mathbb{R} \text{ غير معدودة}$$

التمرين:

$$1. \quad \text{إذا كانت } \phi \text{ مجموعة معدودة على الأكثر، فإن } \mu^*(\phi) = 0$$

$$2. \quad \text{إذا كانت } E \subset F \text{، فإن } \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$

$$3. \quad \text{إذا كانت } E \subset F \text{، فإن } \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$

وهذا يعني أن μ^* هي مقياس لـ σ -جبر.

(P) F عودة على الأكثر $\Leftarrow E$ عودة على الأكثر وبالتالي:

$$\mu^*(E) = 0 = \mu^*(F)$$

(b) F غير عودة على الأكثر $\Leftarrow E$ عودة على الأكثر

$$\mu^*(E) = 0 \leq 1 = \mu^*(F)$$

أو: E غير عودة على الأكثر \Leftarrow

$$\mu^*(E) = 1 \leq 1 = \mu^*(F)$$

(ف 2.3)

لكن $E \in 2^X$ ، E_1, E_2, \dots ، لنفرض أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

وهنا غير الحالات الخاصة:

(P) المجموعات E_n كل عودة على الأكثر $\Leftarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$

مجموعة عودة على الأكثر

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \Leftarrow$$

(b) يوجد على الأقل مجموعة E_n غير عودة $\Leftarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$

مجموعة غير عودة \Leftarrow

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

بالتالي: μ^* قياس μ^* على 2^X

2. لا يحدد صف المجموعات، لقياس μ^* \Leftarrow

نأخذ الهدف μ من كل المجموعات E حيث

$$E \subset 2^X, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \in 2^X$$

أقياس عملي
2017-2018

التمرين الأول

ولها عين الحالات الآتية :

(أ) المجموعة A عسودة على الأكثر $\iff \mu^*(A) = 0$
والحالات المتكافئة لها هي :

$$0 = 0 + 0$$

ولهذا يعني أنه $A \cap E$ عسودة على الأكثر وكذلك

$A \cap E^c \sim \sim \sim A \cap E^c$ ، هذا يعرض أن لكل E

(ب) المجموعة A غير عسودة على الأكثر $\iff \mu^*(A) = 1$

\iff الحالات المتكافئة : هي إما (ب) $1 = 1 + 0$

$$1 = 0 + 1 \quad \text{أو} \quad (2)$$

إذ أن :

(ب) تكون المجموعة $A \cap E$ غير عسودة \iff بينما $A \cap E^c$ عسودة

$\iff E^c$ عسودة على الأكثر

(ب) تكون المجموعة $A \cap E$ عسودة بينما المجموعة $A \cap E^c$ غير عسودة

$\iff E$ عسودة ،

ولذلك تكون

$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{ E \in 2^X \mid E \text{ عسودة على الأكثر أو } E^c \text{ عسودة على الأكثر} \}$

(2) القياس $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ هو :

$$\mu : \mathcal{M}_{\mu^*} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

$$E \longrightarrow \mu(E) = \begin{cases} 0 & , E \text{ عسودة} \\ 1 & , E \text{ غير عسودة} \end{cases}$$

ملحوظة :

لواندنا مثلاً مجموعة $X = \mathbb{R}$ وهي غير معدودة
وغير معدودة فليبدأنا بمجموعات :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, [0, 1] \cap \mathbb{Q}$$

تنتمي للمقياس μ (أو معدودة)
 μ^*

ببساطة المجموعة $E = [0, 1]$ لا تنتمي إلى μ
 μ^*

لأن E ليست معدودة وكذلك، الحقيقة $E^c = \mathbb{R} \setminus [0, 1]$
ليست معدودة.

انتهت الحاضرة و -